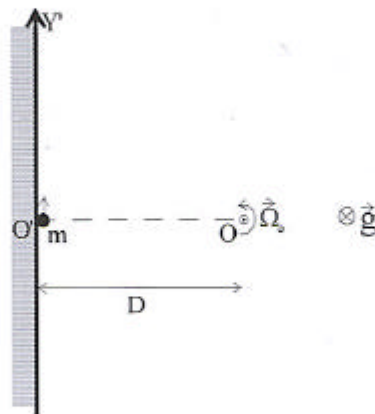


### Control 3

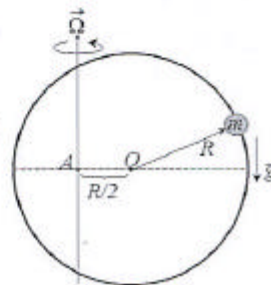
1. Una partícula de masa  $m$  se mueve sin roce por el borde de un muro ubicado en el eje  $Y'$ . El muro y la partícula están sobre una plataforma horizontal que rota con velocidad angular  $\Omega_0 \hat{k}$  ( $\Omega_0$  constante positiva) con respecto a un punto fijo  $O$  ubicado a una distancia  $D$  de  $O'$ . Si la partícula inicia su movimiento en  $O'$  con una velocidad relativa muy pequeña en el sentido  $+\hat{j}'$ , se pide:

- Mostrar que mientras la partícula se mantiene en contacto con el muro, su rapidez relativa es proporcional a su distancia a  $O'$ .
- Determinar el punto en que la partícula se separa del muro.
- Indique cómo cambia (o no cambia) la respuesta de b) si la velocidad inicial es en la dirección  $-\hat{j}'$ . Nota: puede responder esta parte en forma cuantitativa o en forma cualitativa, en cuyo caso debe explicar claramente su argumento físico.



2. Un aro circular vertical de radio  $R$  y centro  $O$  gira con velocidad angular constante  $\Omega \hat{k}$  en torno a un eje vertical que pasa por  $A$ , ubicado a una distancia  $R/2$  de  $O$ . Por el aro puede deslizarse sin roce una partícula de masa  $m$ , la cual es soltada con velocidad nula relativa al aro desde el punto más alto. Se pide:

- La velocidad y aceleración de la partícula relativa al aro.
- La fuerza que le ejerce el aro a la partícula.
- Una expresión que permita determinar la distancia recorrida por la partícula sobre el aro entre su posición inicial y la posición en que se detiene por primera vez (respecto del aro).

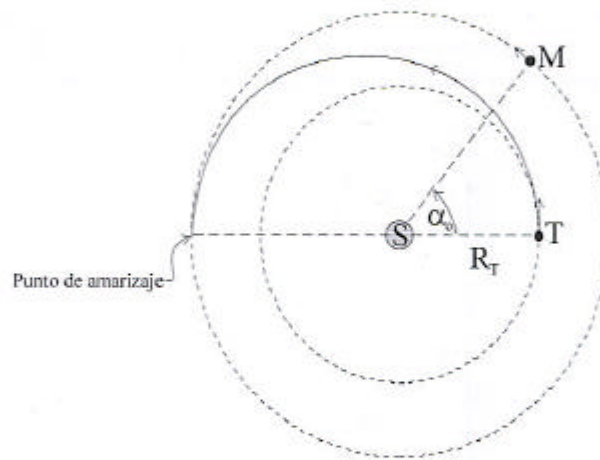


3. Considere el envío de una nave espacial desde la Tierra hasta Marte. Suponga que la Tierra y Marte describen órbitas circulares en torno al Sol de radios  $R_T$  y  $R_M = f R_T$  ( $f > 1$ ), respectivamente. Se desea que la nave describa una órbita elíptica tangente a la órbita de la Tierra en su perihelio y tangente a la órbita de Marte en su afelio (ver figura). Para lograr lo anterior se pide:

a) Determinar el ángulo  $\alpha_0$  que debe existir entre las posiciones de la Tierra y de Marte en el momento del lanzamiento de la nave, de tal manera que la nave coincida con Marte en su afelio.

b) Determinar los cambios de energía cinética que debe sufrir la nave en su lanzamiento y en su amarizaje.

Nota: Suponga que el Sol (de masa  $M$ ) es el único centro de fuerzas relevante en el problema (es decir, desprecie la atracción gravitacional entre los planetas y la nave).



Información potencialmente útil:

$$r(\theta) = \frac{h^2 / C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{C^2}} \cos \theta} \quad h = L_o / m \quad \varepsilon = E_o / m \quad C = GM$$

$$r(\theta) = \frac{r_o (1 + e)}{1 + e \cos \theta} \quad T^2 = \frac{(2\pi)^2}{C} a^3$$

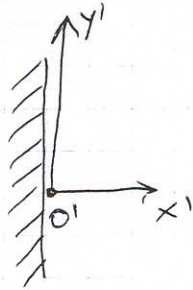
$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{reales}} - m\vec{a}_o - 2m\vec{\Omega}_o \times \vec{v}' - m\vec{\Omega}_o \times (\vec{\Omega}_o \times \vec{r}') - m\vec{\alpha}_o \times \vec{r}'$$

(P1)

 $1/2$ PAUTA P1 - C3 F121A - 2004/2  
SEC. 01

(1)

$$\vec{\Omega}_0 = \Omega_0 \hat{k}$$



$$\vec{r}' = y' \hat{j}'$$

$$\vec{v} = \dot{y} \hat{j}$$

$$\vec{a} = \ddot{y} \hat{j}$$

Fuerzas reales:  $\vec{N} = N \hat{i}$

Fuerzas ficticias:

$$-m\vec{a}_0 = -m(D\Omega_0^2 \hat{i})$$

$$-2m\vec{\Omega}_0 \times \vec{v} = -2m\Omega_0 \hat{k} \times \dot{y} \hat{j} = 2m\Omega_0 \dot{y} \hat{i}$$

$$\begin{aligned} -m\vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{r}) &= -m\vec{\Omega}_0 \times (\Omega_0 \hat{k} \times y \hat{j}) \\ &= -m\vec{\Omega}_0 \times \Omega_0 y (-\hat{i}) = m\Omega_0^2 y \hat{i} \end{aligned}$$

$$-m \vec{a}_0 = 0$$

Ec. de momento

$$x: \quad 0 = N - mD\Omega_0^2 + 2m\Omega_0 \dot{y} \quad (1)$$

$$y: \quad m\ddot{y} = m\Omega_0^2 y \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \ddot{y} = \Omega_0^2 y$$

$$\text{sea } \dot{y} = ay$$

$$\ddot{y} = a\dot{y} = a^2 y$$

$$a = \Omega_0$$

$$\boxed{\ddot{y} = \Omega_0^2 y}$$

Ⓟ 2/2

$$b) \quad (1) \Rightarrow N = m D \Omega_0^2 - 2m \Omega_0 \dot{y}$$

$$\text{pero } \dot{y} = \Omega_0 y$$

$$\Rightarrow N = m D \Omega_0^2 - 2m \Omega_0^2 y$$

$$N=0 \Rightarrow \boxed{y_* = \frac{D}{2}}$$

c) Matemáticamente  $y_* = \frac{D}{2}$  es la única solución  $\Rightarrow$  no existe despegue para  $y < 0$ .

Fricamente: si la partícula se mueve según  $-\hat{j}$  tanto la fuerza centrífuga como la fuerza de Coriolis mantienen a la partícula pegada al muro. No se produce separación.



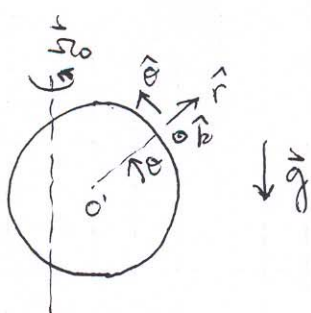
P2

 $\frac{1}{2}$ 

PAUTA P2 - C3 FIZIA 2004/2  
SEZ 01

01 225

②



$$\begin{aligned}\hat{k} &= \sin\theta \hat{r} + \cos\theta \hat{\theta} \\ \hat{I} &= \cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{m}a' = \frac{\gamma}{F} \vec{F}^{Real} + \frac{\gamma}{F} \vec{F}^{Inertial}$$

$$\vec{a}' = -R\ddot{\theta}^2 \hat{r} + R\ddot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = -gm (\underbrace{x \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}}_{\hat{k}}) + N_r \hat{r} + N_z \hat{k}$$

F. meriale:

F. centrales:

$$-m\vec{a}_0 = -m \Omega_0^2 \frac{R}{2} \overbrace{(-\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})}^{-\hat{I}}$$

$$= m \Omega_0^2 \frac{R}{2} (\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta})$$

$$-2m\vec{\Omega}_0 \times \vec{v}' = -2m\Omega_0 (\kappa\theta \hat{r} + \omega\theta \hat{r}) \times R\dot{\theta} \hat{\theta} \\ = -2m\Omega_0 \kappa\omega\theta R\dot{\theta} \hat{k}$$

$$\begin{aligned} -m \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{r}) &= -m \vec{\Omega}_0 \times (\Omega_0 (\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \times R \hat{r}) \\ &= -m \Omega_0 (\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \times \Omega_0 R \sin \theta (-\hat{k}) \\ &= m \Omega_0^2 R \sin \theta (\cos \theta (-\hat{\theta}) + \sin \theta \hat{r}) \end{aligned}$$

$E_c$  de mto.

$$\hat{r}: -mR\ddot{\theta}^2 = -mg\sin\theta + N_r + m\Omega_0^2 \frac{R}{2} \cos\theta + m\Omega_0^2 R \cos^2\theta \quad (1)$$

$$\hat{\theta}: m R \ddot{\theta} = -mg \cos \theta - m \Omega_0^2 \frac{R}{2} \sin \theta - m \Omega_0^2 R \cos \theta \sin \theta \quad (2)$$

$$\hat{K}: \quad \Theta = N/2 - 2m\Omega_0 R \dot{\Theta} \sin\Theta \quad (3)$$

(P2)

$\pi/2$

(2)  $\Rightarrow$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \cos \theta - \frac{\Omega_0^2}{2} \sin \theta - \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta \quad (4)$$

integrando entre

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = 0$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R} \sin \theta \Big|_{\pi/2}^{\theta} + \frac{\Omega_0^2}{2} \cos \theta \Big|_{\pi/2}^{\theta} - \frac{\Omega_0^2}{2} \sin^2 \theta \Big|_{\pi/2}^{\theta}$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R} (\sin \theta - 1) + \frac{\Omega_0^2}{2} (\cos \theta) - \frac{\Omega_0^2}{2} (\sin^2 \theta - 1)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{g}{R} (1 - \sin \theta) + \frac{\Omega_0^2}{2} \cos \theta (1 + \cos \theta)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{2 \left( \frac{g}{R} (1 - \sin \theta) + \frac{\Omega_0^2}{2} \cos \theta (1 + \cos \theta) \right)} \quad (5)$$

b) Fuerzas del aro.

(1)  $\Rightarrow$

$$N_r = mg \sin \theta - m \Omega_0^2 \frac{R}{2} \cos \theta - m \Omega_0^2 R \cos^2 \theta - m R \ddot{\theta}$$

$$N_z = 2m \Omega_0 R \dot{\theta} \sin \theta$$

$$c) \quad \dot{\theta} = 0 = \frac{g}{R} (1 - \sin \theta_*) + \frac{\Omega_0^2}{2} \cos \theta_* (1 + \cos \theta_*)$$

P3 1/3

PAUTA P3 C3 FIZIA PRI 2004  
SET 01

(3)

a) Tiempo que tarda la nave en su recorrido

$$\phi = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\sqrt{c}} a^{3/2} \right)$$

$a$ : semi eje mayor:

$$a = \frac{R_T + R_M}{2} = R_T \frac{1+f}{2}$$

$$\text{o} \phi = \frac{R_T^{3/2}}{c^{1/2}} \pi \left( \frac{1+f}{2} \right)^{3/2}$$

Necesitamos calcular la velocidad angular de Marte.

$$h_M = R_M^2 \omega_M$$

$$\omega_M = \frac{h_M}{R_M^2} = \frac{h_M}{R_T^2 f^2}$$

pero para órbita circular

$$\frac{h_M^2}{c} = R_M \Rightarrow h_M = \sqrt{c} \sqrt{R_T} f^{1/2}$$

$$\Rightarrow \omega_M = \frac{\sqrt{c}}{R_T^{3/2}} \frac{f^{1/2}}{f^2} = \frac{\sqrt{c}}{R_T^{3/2}} \frac{1}{f^{3/2}}$$

$$\text{o} \pi - \alpha_0 = \omega_M \cdot \phi = \frac{1}{f^{3/2}} \cdot \pi \left( \frac{1+f}{2} \right)^{3/2} = \pi \left( \frac{1+f}{2f} \right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \pi - \%$$

Ⓟ 2/3

b)

Energía de órbitas circulares

$$E_T = -\frac{C}{2R_T}$$

$$E_M = -\frac{C}{2R_M} = -\frac{C}{2fR_T}$$

falta la energía de la órbita de la nave.

Sabemos que

$$\sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{C^2}} = e \quad (*)$$

Necesitamos calcular  $e$  y  $h$ .

Pero  $r_{min} = R_T$

$$r_{max} = R_M = fR_T$$

$$fR_T = R_T \frac{(1+e)}{(1-e)} \Rightarrow \boxed{e = \frac{f-1}{f+1}}$$

Sabemos que

$$R_T(1+e) = \frac{h^2}{C} \rightarrow h^2 = CR_T(1+e)$$

$$\boxed{h^2 = CR_T \frac{2f}{1+f}}$$

Tenemos todo para usar  $(*)$  y despejar  $E$ .



(P3) 3/3

de (\*) :

$$\varepsilon = \frac{c^2}{2h^2} (e^2 - 1)$$

$$= \frac{c^2}{2 \left( c R_T \frac{2f}{1+f} \right)} \left( \frac{(f-1)^2}{(f+1)^2} - 1 \right)$$

$$= \frac{c}{4 R_T f} \frac{(f-1)^2 - (f+1)^2}{(f+1)}$$

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{c}{R_T} \frac{1}{(f+1)}} \quad \text{energía de órbita elíptica}$$

$$\Delta \varepsilon_1 = -\frac{c}{R_T} \frac{1}{(1+f)} - \left( -\frac{c}{2 R_T} \right) = \frac{f-1}{2(f+1)} \frac{c}{R_T}$$

$$\Delta \varepsilon_2 = -\frac{c}{2 f R_T} - \left( -\frac{c}{R_T (1+f)} \right) = \frac{f-1}{2f(1+f)} \frac{c}{R_T}$$